

Поздняков Сергей Николаевич

СРЕДА «GEOMETRY EXPRESSIONS» – РАБОТА С ФУНКЦИЯМИ

Продолжаем публикацию материалов по программе Geometry Expressions. В этом выпуске журнала мы знакомим читателей с возможностями программы для работы с функциями (хотя по названию программа GE как бы привязана к изучению геометрии). Основная особенность программы – возможность аналитического описания графических объектов (то есть задание их различными формулами). Первые два кадра представляемой презентации показывают, как вводятся конкретные функции, в том числе кусочные.

1 **Ввод функции**

Рекомендация:

- сначала ввести любое имя функции, например, $f(x)$, а потом, щелкнув на имени, можно его менять с помощью панели символов

2 **Кусочно-заданная функция**

- Редактировать имя функции с помощью вставки нужного числа систем условий из панели символов

Третий кадр является примером задачи, когда ученикам предлагается подобрать параметры так, чтобы заданная кусочная функция стала непрерывной. На четвертом кадре показана возможность ограничивать область определения функции (к сожалению, в использованной версии программы при задании такой функции нужно было использовать шаблон кусочной функции и вводить лишнюю вторую строку, которая не несёт новой информации). Пятый кадр демонстрирует возможность работы с так называемой произвольной функцией, график которой можно менять перетягиванием мышкой за опорные точки (реально это функция с несколькими параметрами, создающая видимость произвольной функции, аналогично тому, какую учитель рисует на доске, сопровождая словами «возьмём произвольную функцию»). Кадры 6–9 показывают как можно использовать программу для обучения таким общим понятиям, как монотонность, экстремум и прочее. Оказывается, что заложенное в программе описание функций позволяет использовать формальные определения как операции над графическими объектами (для выделения данных особенностей на графиках функций).

3

Непрерывная функция

- При каких значениях параметров функция является непрерывной

$$Y = \begin{cases} X \cdot c + d & X \leq m \\ X^2 \cdot a + b & X > m \text{ and } X \leq n \\ X \cdot c + d & X > n \end{cases}$$

$$Y = \begin{cases} X \cdot c + d & X \leq m \\ X^2 \cdot a + b & X > m \text{ and } X \leq n \\ X \cdot c + d & X > n \end{cases}$$

4

Ограничение области определения

- Использование кусочно-заданной функции

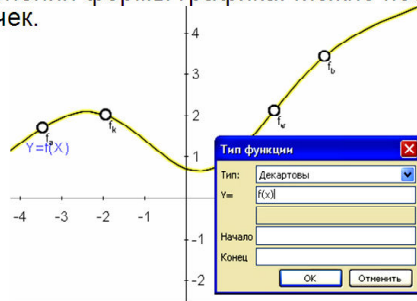
$$Y = \begin{cases} X^2 \cdot a + b & X \geq c \\ 1 & 1 > 1 \end{cases}$$

$$Y = \begin{cases} X^2 \cdot a + b & X \geq c \text{ or } X \leq d \\ 1 & 1 > 1 \end{cases}$$

5

«Произвольная» функция

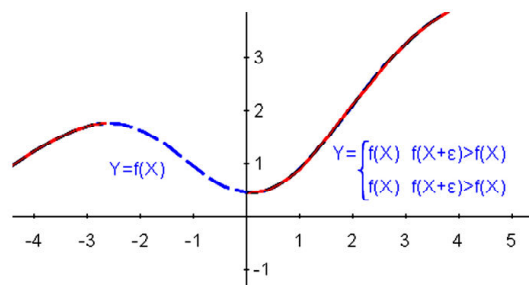
- В окно ввода функции ввести имя функции, например, $f(x)$ или $g(x)$ и т.д. Если щелкнуть на график (выделить его), а потом потянуть за любое место, появится точка для изменения формы графика. Можно поставить до 5 таких точек.



6

Определения свойств функции

- Возрастание, убывание, неотрицательность, максимумы и минимумы, корни и пр. Используем возможность условного задания функции. Вместо задачи «дать определение» даём задачу «сконструировать определение и проверить экспериментально его корректность»



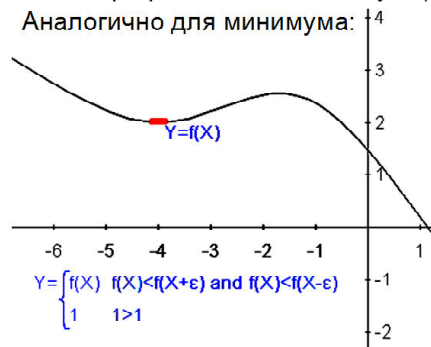
7

Пример определения максимума

$$f(x) > f(x+\epsilon) \text{ AND } f(x) > f(x-\epsilon)$$

(нарисовать график вблизи максимума)

Аналогично для минимума:



8

Области неотрицательности, возрастания и пр.

$$Y = \begin{cases} 0 & f(x) > 0 \\ 0 & f(x) > 0 \end{cases}$$

$$Y = \begin{cases} 0 & f(x) > f(x+\epsilon) \\ 0 & f(x) > f(x+\epsilon) \end{cases}$$

9

Комбинированные задачи (функции и предикаты)

Задача 1. Отметить часть графика, где функция неотрицательна и возрастает.

Задача 2. Отметить часть графика, которая лежит в третьей четверти.

Задача 3. Отметить части графика, которые пересекают ось абсцисс, убывая.

Задача 4. Изобразить на оси абсцисс множество значений аргумента, удовлетворяющих неравенству $f(x) > g(x)$

Задача 5. Работа со сложными функциями: выражение через *signum* кусочных функций:

- положительная часть функции
- функция, равная 1 на отрезке $[-1;1]$ и 0 в остальных точках (импульсная функция)

10

Преобразования графиков

Один из типов заданий

- График преобразуется с помощью заданного преобразования (перенос, симметрия, гомотетия). После этого нужно найти общую формулу полученного графика функции.

Кадры 10–12 демонстрируют различные виды конструктивных задач, являющихся динамическими аналогами задач в традиционной постановке на работу с графиками функций.

11 **Параметрические представления классов функций**

Пример

- Как превратить теорему Виета в упражнение с графиками: выразить p и q через a и b . Найти выражения одних параметров через другие так, чтобы графики совпали (чтобы их различить, надо раскрасить разными пунктирами и цветами).

12 **Преобразование произведения косинусов в сумму (разложение в ряд Фурье)**

Найти выражения одних параметров через другие так, чтобы графики совпали (чтобы их различить, надо раскрасить разными пунктирами и цветами). Можно вместо одних параметров взять конкретные числа, тогда вместо «выразить» нужно будет «найти» значения других параметров.

13 **Определение производной**

- Поэкспериментировать с уменьшением ϵ , можно сравнить с настоящей производной, можно предложить объяснять связь поведения производной и функции на основе определения.

Кадры 13–16 посвящены введению производной. Следует обратить внимание на то, что мы можем интерпретировать отношение приращения функции к приращению аргумента произвольной функции как функцию и сравнивать её график с графиком производной, для которой в программе есть специальный оператор её вычисления.

14 **Задачи по определению производной**

- **Задача 1.** Докажите, что при возрастании функции её производная возрастает.
- **Задача 2.** Что происходит с графиком производной вблизи максимума функции.
- **Задача 3.** Объяснить, какое свойство функции показывает максимум производной.

15 **Другие разностные формулы (точность)**

- Объяснить по графику, какая формула вычисления производной лучше. Проверить обе формулы на производной функции $y=x^2$

16 **Оператор вычисления производной**

Diff(f(x),x)

Кадры 17–21 постепенно вводят понятия дифференциального уравнения (обобщая, в том числе, и понятие числа e).

17

Что такое число e ?

- Найти такое значение основание, при котором дифференцирование показательной функции не изменит её.

Тип функции

Тип: Дифференциал

$y = \text{diff}(a^x, x)$

Перенные

Имя (Название)	Значение	Значение
a	1.5675	-

1.5675

0.5

18

Исследование на таблице производных (введение в дифференциальные уравнения)

- Задача 1. Найдите показательную функцию, которая удовлетворяет дифференциальному уравнению $y' = 2y$
- Задача 2. Найдите показательную функцию, которая удовлетворяет дифференциальному уравнению $y' = -y$
- Задача 3. Найдите степенную функцию, которая удовлетворяет дифференциальному уравнению $y' = y^2$
- Задача 4. Найдите степенную функцию, которая удовлетворяет дифференциальному уравнению $y' = \frac{1}{y}$

19

Решение задачи 4

- Можно попробовать искать на множестве с двумя параметрами, рассматривая функции $y = a \cdot x^b$

Перенные

Имя (Название)	Значение	Значение
a	1	-

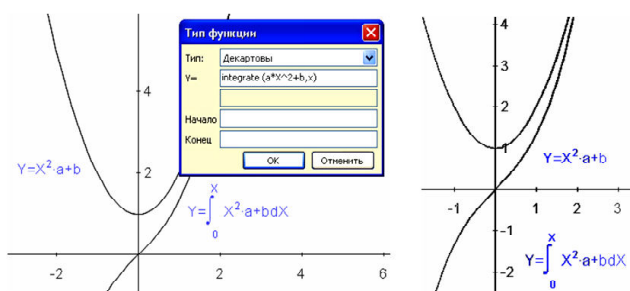
1

2

20

Первообразная

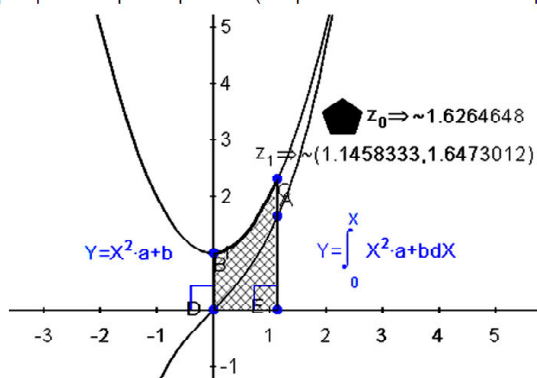
- Оператор интегрирования integrate (f(x),x)



21

Интеграл (формула Ньютона-Лейбница)

- Эксперимент с вычислением интервала как площади и и как приращения первообразной (теорема Ньютона-Лейбница)



Наши авторы, 2014.
Our authors, 2014.

*Поздняков Сергей Николаевич,
доктор педагогических наук,
профессор кафедры ВМ-2
СПбГЭТУ «ЛЭТИ».*